

№5-дәріс. Тендеу туралы жалпы түсініктер. Алгебралық түзулер мен беттер
Жазықтықтағы түзулердің және кеңістіктегі жазықтықтардың тендеулерінің
түрлері. Жазықтықтағы жазықтықтар мен түзулердің параллельдігінің
критерийлері.

1. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі

Жазықтықта $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі және оған перпендикуляр $\vec{n} = (A; B; C)$ векторы берілсін. Сонда берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі төменгідей болады:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (5.1)$$

2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (5.2)$$

Егер $D=0$ болса, онда жазықтық бас нүкте арқылы өтеді; егер $C=0$ онда, жазықтық Oz өсіне параллель өтеді; егер $C=D=0$ болса, онда жазықтық бас нүкте арқылы Oz өсіне параллель өтеді; егер $A=B=D=0$ болса, онда $z=0$ болады. Бұл Oxy жазықтығы.

3. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі. $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

4. Жазықтықтың кесінділік теңдеуі

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (5.4)$$

5. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш. Жазықтықтар $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ теңдеулері мен берілсе, онда $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ болғандықтан жазықтықтардың арасындағы бұрыш осы екі нормальдің арасындағы бұрышқа тең:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (5.5)$$

Осыдан егер жазықтықтар параллель болса, онда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, ал перпендикуляр болса,

онда $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ болады.

6. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықтың формуласы

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5.6)$$

Кеңістіктегі түзудің теңдеулері

1. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі. Түзу $M_0(x_0; y_0; z_0)$ және $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нүктелерінен өтсе, онда оның теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (5.7)$$

2. Түзудің канондық теңдеуі

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі түзудің бойында жатысын және ол түзу $\bar{a} = (m; n; p)$ векторына параллель болсын. Түзудің бойынан кез келген $M(x; y; z)$ нүктесін аламыз. Сонда, $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. $\overline{M_0M}$ векторы түзудің бойында жатқандықтан $\overline{M_0M} \parallel \bar{a}$ болады. Сондықтан түзудің канондық теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (5.8)$$

Мұндағы $\bar{a} = (m; n; p)$ – бағыттаушы вектор деп аталады.

3. Түзудің параметрлік теңдеуі. (5.7) теңдеуіндегі әр теңдікті t -ға теңеп, мына теңдеуді аламыз:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt \quad (5.9)$$

4. Түзудің жалпы теңдеуі. Өзара параллель емес екі жазықтық жалпы теңдеулері мен берілсін:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (5.10)$$

Сонда бұл жазықтықтар бір түзудің бойымен қиылысады. Ендеше осы екі жазықтықтың қиылысқан түзуінің бойындағы кез келген нүктенің координаттары екі жазықтықтың да теңдеуін қанағаттандырады. Сондықтан осы екі теңдеулер жүйесін түзудің жалпы теңдеуі дейді.

5. Екі түзудің арасындағы бұрыш. Екі түзу канондық теңдеулері мен берілсін: $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ және $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$. Екі түзудің арасындағы бұрыш сол түзулердің бағыттаушы векторларының арасындағы бұрышқа тең ($\bar{a}_1 = (m_1; n_1; p_1)$, $\bar{a}_2 = (m_2; n_2; p_2)$):

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| |\bar{a}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (5.10)$$

Егер түзулер өзара параллель болса, онда $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$ болады. Түзулердің параллелдік шарты $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, егер түзулер өзара перпендикуляр болса, онда $\bar{a}_1 \perp \bar{a}_2$ болады. Түзулердің перпендикулярлық шарты $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ болады.

Түзу мен жазықтық. Жалпы теңдеуі мен берілген $Ax + By + Cz + D = 0$ – жазықтық пен канондық теңдеуімен түзудің $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ арасындағы бұрышты табу керек.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы түзу мен оның жазықтыққа түсірілген проекциясының арасындағы сыбайлас бұрыштың біреуін айтады. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусы мына формуламен есептелінеді:

$$\sin \psi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (5.11)$$

Түзу мен жазықтықтың параллелдік белгісі: $Am + Bn + Cp = 0$. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

1-мысал. $x = 2 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3 + t$ түзуі мен $x + 3y - z + 6 = 0$ жазықтығының арасындағы бұрыштың синусы мен қиылысу нүктесін табу керек. $\bar{n} = (1; 3; -1)$, ал

$\bar{a} = (2; -1; 1)$ болғандықтан $\sin \psi = \frac{2-3-1}{\sqrt{1+9+1} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{-2}{\sqrt{66}}$. Қиылысу нүктесін табу

үшін түзу мен жазықтықтың теңдеулер жүйесін шешеміз.

Сонда $2+2t-3-3t-3-t+6=0 \Rightarrow -2t+2=0 \Rightarrow t=1$.

Осыдан $x=4$, $y=-2$, $z=4$, яғни $N(4, -2, 4)$.